Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Quatrième séance d'exercices –

`géodésiques`

Les corrections sont intercalées entre les énoncés et entourées d'un cadre similaire à celui-ci. Nous omettons de reproduire les corrections de certains exercices complémentaires (ou de certaines parties d'exercices) marqués d'une étoile (*). Si discuter de la résolution de l'un de ces problèmes vous intéresse, venez directement me trouver !

Exercice 1 : géodésiques sur la 2-sphère. On considère la sphère S^2 munie de sa métrique naturelle, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$.

a. Écrire les équations d'Euler-Lagrange pour les géodésiques.

Correction. Les solutions des équations d'Euler-Lagrange pour les géodésiques sont les points stationnaires de la fonctionnelle $I = \int \mathcal{L}\mathrm{d}\tau$ (*cf.* aide-mémoire, pour rappel, $\dot{}$ désigne une dérivée par rapport au temps propre) avec

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2}\big(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2\big).$$

Deux méthodes sont utilisables pour trouver les équations d'Euler-Lagrange :

◇ On se souvient que la forme générale de ces équations est

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_A}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_A} = 0. \tag{1}$$

Ici, $q_A = \theta, \phi$. Or, puisque

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \sin^2\theta \dot{\phi}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0,$$

On obtient directement les équations d'Euler-Lagrange en utilisant (1)

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0, \tag{2a}$$
$$\ddot{\phi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\phi} = 0. \tag{2b}$$

◇ Si l'on a un doute et que l'on ne se souvient plus bien de (1), on peut calculer directement la variation de la fonctionnelle I sous une variation arbitraire des variables θ et ϕ. Comme on en a l'habitude en théorie des champs, on suppose que les variations des variables et de leurs dérivées s'annulent au bord de l'intervalle de temps propre sur lequel on effectue la variation et on intègre par partie :

$$\begin{aligned}
\delta I &= \frac{1}{2}\int \left(2\dot\theta\delta\dot\theta + 2\sin^2\theta\dot\phi\delta\dot\phi + 2\sin\theta\cos\theta\delta\theta\dot\phi^2\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{(\text{terme aux bords})}_{=0} - \int\left[\ddot\theta\delta\theta + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sin^2\theta\dot\phi\right)\delta\phi - \sin\theta\cos\theta\dot\phi^2\delta\theta\right]\mathrm{d}\tau \\
&= -\int\left[\left(\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\dot\phi^2\right)\delta\theta + \sin^2\theta\left(\ddot\phi + 2\cot\theta\dot\theta\dot\phi\right)\delta\phi\right].
\end{aligned}$$

Or puisqu'on doit avoir $\delta I = 0$ pour n'importe quelles variations $\delta\theta$ et $\delta\phi$, on a nécessairement

$$\begin{aligned}
\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\dot\phi^2 &= 0, \\
\sin^2\theta\left(\ddot\phi + 2\cot\theta\dot\theta\dot\phi\right) &= 0,
\end{aligned}$$

qui sont bien équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange (2a)-(2b).

b. En déduire les $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ pour la métrique ci-dessus.

Correction. Souvenons-nous que les équations géodésiques s'écrivent

$$\ddot x^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot x^\alpha \dot x^\beta = 0.$$

- Pour $x^\mu = \theta$, on a

$$\ddot\theta + 2\Gamma^\theta_{\theta\phi}\dot\theta\dot\phi + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\dot\theta^2 + \Gamma^\theta_{\phi\phi}\dot\phi^2 = 0.$$

En comparant directement cette équation avec (2a), on voit que

$$\Gamma^\theta_{\theta\phi} = \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0, \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta.$$

- Pour $x^\mu = \phi$, on a

$$\ddot\phi + 2\Gamma^\phi_{\theta\phi}\dot\theta\dot\phi + \Gamma^\phi_{\theta\theta}\dot\theta^2 + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\dot\phi^2 = 0.$$

En comparant directement cette équation avec (2b), on voit que

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta, \qquad \Gamma^\phi_{\theta\theta} = \Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0.$$

c. Déterminer les géodésiques de S^2 en minimisant la longueur d'une courbe joignant deux points. Sans perte de généralité, on peut choisir les axes tels que les coordonnées de ces points soient $P_1 = (\theta_1, \phi_0)$ et $P_2 = (\theta_2, \phi_0)$.

Correction. La longueur d'une courbe joignant P_1 et P_2 est donnée par

$$I = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2} \mathrm{d}\lambda.$$

On se convainc facilement que l'on peut paramétriser une telle courbe par θ au lieu de λ (qui est ici un paramètre arbitraire). On a donc

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2\theta \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \mathrm{d}\theta.$$

Cette fonctionnelle est minimale si $\sin^2\theta \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0$, soit

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

Les géodésiques de la 2-sphère sont donc bien des arcs de grands cercles.

Exercice 2. Calculer les géodésiques temporelles de la métrique $\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}t^2}{t^2}$.

Indication : Paramétriser les géodésiques par le temps propre : ceci donne une première constante du mouvement. En déduire une deuxième de l'équation d'Euler-Lagrange pour la coordonnée x.

Correction. Suivons les indications données ci-dessus. Si l'on paramétrise les géodésiques (temporelles) par le temps propre τ, la quadri-vitesse $u^\mu = \dot{x}^\mu$ est normée à -1. Explicitement,

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2}\left(\dot{x}^2 - \dot{t}^2\right) = -1. \tag{3}$$

D'autre part, le Lagrangien de notre problème variationnel est $\mathcal{L} = \frac{1}{2t^2}\left(\dot{x}^2 - \dot{t}^2\right)$. L'équation d'Euler -Lagrange selon x se réduit donc à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\dot{x}}{t^2}\right) = 0. \tag{4}$$

Vu (4), on peut poser

$$\frac{\dot{x}}{t^2} = \frac{1}{R}$$

où R est une constante. En utilisant ce résultat, on peut réécrire (3) comme

$$\left(\frac{\dot{t}}{t}\right)^2 = 1 + \frac{t^2}{R^2}$$

On sépare cette équation comme

$$\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\left(\frac{t}{R}\right)^2}} = \mathrm{d}\tau.$$

En effectuant le changement de variables $t/R \equiv \sinh\theta$, on obtient après quelques manipulations

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sinh\theta} = \mathrm{d}\tau.$$

Nos géodésiques sont à présent paramétrisées par un paramètre θ. La coordonnée t est donnée par

$$t(\theta) = R\sinh\theta,$$

tandis que x est solution de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = R\sinh\theta,$$

soit

$$x(\theta) = x_0 + R\cosh\theta.$$

On peut finalement éliminer θ en calculant

$$(x-x_0)^2 - t^2 = R^2\Big(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta\Big) = R^2.$$

Les géodésiques de cette métrique sont donc des branches d'hyperbole dans le plan (t,x). Cette métrique décrit le mouvement d'un observateur uniformément accélérée ($a=1$) dans l'espace-temps de Minkowski, mais décrit dans un système de coordonnées tel quel ledit observateur suive un mouvement géodésique dans ces coordonnées.

Exercice 3 : référentiel en chute libre. Au cours, vous avez énoncé (et démontré en partie) le théorème suivant :

Théorème. *Soit une géodésique de genre temps. Il existe (au moins) un système de coordonnées tel que*

(a) La géodésique ait pour équation $x^k(x^0) = 0$ (cette propriété est vraie pour n'importe quel observateur accéléré) ;

(b) Le temps propre le long de la géodésique soit donné par x^0 (cette propriété est aussi vraie pour n'importe quel observateur accéléré) ;

(c) On puisse poser $g_{\alpha\beta}(x^0, 0) = \eta_{\alpha\beta}$ c'est-à-dire mettre la métrique sous forme minkowskienne tout le long de la géodésique ;

(d) On puisse poser $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^0, 0) = 0$, c'est-à-dire annuler les coefficients de Christoffel tout le long de la géodésique.

Les points (a), (b) et (c) ont été démontrés au cours théorique. Comme échauffement, nous allons remontrer le point (c) et ensuite démontrer le (d).

Indication pour le point (c) : appelons $\tilde{x}^\mu$ les coordonnées telles que les conditions (a)-(b)-(c) soient satisfaites, et x'^μ celles vérifiant seulement (a) et (b). On pose

$$x'^0 = \tilde{x}^0 + L^0_k(\tilde{x}^0)\tilde{x}^k \tag{5a}$$

$$x'^k = \tilde{x}^k \tag{5b}$$

Vérifier que dans les coordonnées $\tilde{x}^\mu$, (a) et (b) sont toujours vérifiées, puis déterminer L^0_k.

Indication pour le point (d) : regarder ce que devient l'équation des géodésiques étant donné les points précédents et utiliser la seule liberté qui reste au niveau des changements de coordonnées, à savoir les rotations $x^k = R^k_l(x'^0)x'^l$.

Correction.

(c) Pour ce point, il nous faut vérifier que dans les coordonnées $\tilde{x}^\alpha$, la métrique prend la forme $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ le long de la géodésique. Vérifions d'abord que sous la transformation (5), les points (a) et (b) sont toujours valides. Pour cela, évaluons cette transformation sur la géodésique. Ainsi, si x'^k satisfait au point (a) et est nul sur la géodésique, il en va aussi pour $\tilde{x}^k$. De même, si x'^0 satisfait au (b) et donne le temps propre le long de la géodésique, comme x'^0 et $\tilde{x}^0$ sont égaux sur la géodésique, cela est pareil pour $\tilde{x}^0$ et ainsi

$$\tilde{g}_{00}|_{\tilde{x}^k=0} = g'_{00}|_{x'^k=0} = -1$$

Regardons ce qu'il en est pour les autres composantes de la métrique.

$$\tilde{g}_{0k}|_{\tilde{x}^k=0} = -L^0_k(\tilde{x}^0) + g'_{0k}|_{x'^k=0}$$

En choisissant donc les fonctions $L^0_k(\tilde{x}^0)$ comme étant

$$L^0_k(\tilde{x}^0) = g'_{0k}|_{x'^k=0},$$

la métrique est diagonale le long de la géodésique :

$$ds^2 = -\,\mathrm{d}\tilde{x}^{0^2} + \tilde{g}_{ij}|_{x'^k=0}\,\mathrm{d}\tilde{x}^i\tilde{x}^j.$$

Comme on peut toujours diagionaliser une matrice symétrique, il suffit de définir les nouvelles coordonnées

$$\begin{aligned}\tilde{x}^0 &= \tilde{\tilde{x}}^0\\ \tilde{x}^k &= L^k_l(\tilde{\tilde{x}}^0)\tilde{\tilde{x}}^l\end{aligned}$$

tel que $L^\intercal \tilde{g} L = \mathbb{1}$. Ensuite on rescale les coordonnées $\tilde{\tilde{x}}^i \to \frac{1}{\lambda^i}\tilde{\tilde{x}}^i$ où les λ^i sont les valeurs propres de $\tilde{\tilde{g}}_{ij}$ de sorte que $\tilde{\tilde{g}}_{ij} \to \delta_{ij}$. Donc, dans les coordonnées $\tilde{\tilde{x}}^\alpha$, $\tilde{\tilde{g}}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ le long de la géodéique.

(d) Pour le moment, nous n'avons pas utilisé le fait que la courbe est une géodésique, juste que c'est une courbe causale. Ainsi les point (a)-(c) sont valades aussi pour un observateur accéléré. Par contre, pour annuler les $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, il faut absolument que la courbe soit une géodésique. Commençons par écrire l'équation de cette dernière

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{x}}^0 &= \tau\ ,\ \tilde{\tilde{x}}^k = 0\\ \tilde{\tilde{u}}^0 &= 1\ ,\ \tilde{\tilde{u}}^k = 0\cdot\end{aligned}$$

L'équation des géodésiques pour cette dernière implique alors que $\tilde{\tilde{\Gamma}}^\alpha_{00} = 0$. En utilisant la définition du symbole de Christoffel, on en déduit que $\partial_\alpha \tilde{\tilde{g}}_{00} = 0$ et que donc aussi $\tilde{\tilde{\Gamma}}^0_{0\alpha} = 0$.

Montrons ensuite que l'on peut aussi annuler les $\tilde{\tilde{\Gamma}}^i_{0j}$. Pour cela, prenons en un point de la géodésique, trois vecteurs orthonormés $\vec{e}^{\,i}$ quelconques dans l'hyperplan perpendiculaire à la courbe. Par transport parallèle et comme ce dernier préserve le produit scalaire, ces vecteurs restent dans l'hyperplan perpendiculaire à la courbe et orthonormés. En chaque point de la géodésique, ces vecteurs diffèrent des vecteurs de bases $\frac{\partial}{\partial \tilde{\tilde{x}}^i}$ par une rotation (car ces derniers sont aussi de genre espace et orthonormés). Ainsi, en définissant $\vec{e}^{\,i} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}$ et

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{x}}^0 &= \hat{x}^0\\ \tilde{\tilde{x}}^k &= R^k_l(\hat{x}^0)\hat{x}^l,\end{aligned}$$

par construction, les vecteurs $\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}$ obéissent à l'équation $u^\alpha \nabla_\alpha v^k = 0$ et donc le long de la géodésique $\hat{\Gamma}^i_{0j} = 0$. On peut aussi vérifier que cette transformation ne modifient pas la valeur des Christoffel déjà annulés et satisfait toujours les point (a)-(c).

Les derniers symboles à annuler sont ceux de la forme $\hat{\Gamma}^\alpha_{ij}$. Pour cela, nous allons effectuer un dernier changement de coordonnées (promis, c'est vraiment le dernier)

$$\hat{x}^\alpha = x^\alpha + \frac{1}{2}C^\alpha_{kl}(x^0)x^k x^l\cdot$$

Cette transformation préserve les points (a)-(c) et est localement inversible

$$x^\alpha = \hat{x}^\alpha - \frac{1}{2}C^\alpha_{kl}(\hat{x}^0)\hat{x}^k\hat{x}^l + O(\hat{x}^3)\cdot$$

Pour rappel, sous un changement de coordonnées quelconques $x^\mu \to x'^\mu(x^\nu)$, la connexion se transforme comme

$$\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\gamma}\Gamma^\mu_{\nu\rho} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma}.$$

Sous ce changement de coordonnées, sur la géodésique, les seules composantes qui se transforment non-trivialement sont

$$\Gamma^\alpha_{kl} = \hat{\Gamma}^\alpha_{kl} + C^\alpha_{kl}.$$

On choisit donc les coefficients C^α_{kl} de sorte à annuler les Γ^α_{kl}. Nous avons donc réussi à annuler tous les coefficients de la connexion le long de la géodésique.